Μαθηματική Στατιστική – Έλεγχοι Υποθέσεων

Δημήτρης Φουσκάκης,
Καθηγητής,
Τομέας Μαθηματικών,
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών,
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

Εισαγωγή

Στατιστική Υπόθεση -> Υπόθεση που αφορά

- Την άγνωστη παράμετρο $\boldsymbol{\theta}$ της σ.π.π./σ.μ.π. $f(x;\boldsymbol{\theta}) \equiv p(x|\boldsymbol{\theta})$, όπου f γνωστή (έλεγχος παραμετρικής υπόθεσης)
- Την συναρτησιακή μορφή της f (έλεγχος καλής προσαρμογής)

Παραδείγματα:

- Τμήμα ερευνών βιομηχανίας εξετάζει αν η εφαρμογή μιας νέας τεχνικής στην παραγωγή προϊόντος μεταβάλει τη μέση διάρκεια ζωής X του προϊόντος, αν γνωρίζουμε πως $X \sim f(x;\boldsymbol{\theta})$.
- Εξέταση αν ο αριθμός εισερχόμενων κλήσεων στο κινητό μου ημερησίως ακολουθεί την κατανομή Poisson

Έλεγχοι Παραμετρικής Υπόθεσης

Έστω $\mathbf{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ τυχαίο δείγμα από το μοντέλο $(X, \mathcal{X}, f(x;\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\ldots,\theta_m) \in \Theta)$ $(n > m)$ και $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ παρατηρήσεις.

Μηδενική Υπόθεση: $H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_o$

Εναλλακτική Υπόθεση: $H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$

με Θ_o , Θ_1 ξένα υποσύνολα του Θ, αλλά όχι κατά ανάγκη συμπληρωματικά.

- Αν Θ_o μονοσύνολο τότε η H_0 καλείται απλή αλλιώς σύνθετη υπόθεση.
- Αν Θ_1 μονοσύνολο τότε η H_1 καλείται απλή αλλιώς σύνθετη υπόθεση.
- Αν και οι δύο υποθέσεις είναι απλές ο έλεγχος καλείται απλός αλλιώς σύνθετος.

Έλεγχοι Παραμετρικής Υπόθεσης

Παράδειγμα: Έστω Χ ~ $N(\mu,\sigma^2)$ με μ, σ άγνωστα

1. Η υπόθεση $\mu=\mu_0$ (γνωστό) ΚΑΙ $\sigma=\sigma_o$ (γνωστό) είναι απλή
2. Η υπόθεση $\mu=\mu_0$ (γνωστό) είναι σύνθετη
3. Ο έλεγχος

$$H_0: \mu=\mu_{0,}\ \sigma=\sigma_0$$
$$H_1: \mu=\mu_{1,}\ \sigma=\sigma_1$$

είναι απλός, ενώ ο έλεγχος

$$H_0: \mu=\mu_{0,}\ \sigma=\sigma_0$$
$$H_1: \mu\neq\mu_{0,}\ \sigma=\sigma_1$$

είναι σύνθετος.

Άρα ο έλεγχος είναι σύνθετος αν τουλάχιστον μία από τις υποθέσεις δεν καθορίζει πλήρως την κατανομή της Χ.

Έλεγχοι Παραμετρικής Υπόθεσης

Μηδενική Υπόθεση: $H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_o$

Εναλλακτική Υπόθεση: $H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$

Λογική Ελέγχου Υποθέσεων: Αθώος (H_0 σωστή) μέχρι αποδείξεως του εναντίου (H_0 λανθασμένη). Άρα ή θα έχουμε αρκετές ενδείξεις από τα δεδομένα για να απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση ή δεν θα έχουμε αρκετές ενδείξεις και δεν μπορούμε να την απορρίψουμε.

Έλεγχοι Παραμετρικής Υπόθεσης

- Ο έλεγχος
$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$
καλείται αμφίπλευρος.
- Οι έλεγχοι
$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta > \theta_0 \qquad H_1 : \theta < \theta_0$$
καλούνται μονόπλευροι.

Έλεγχοι Παραμετρικής Υπόθεσης

Με τη βοήθεια των παρατηρήσεων δείγματος **x** = $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ του τυχαίου δείγματος **X** = $(X_1,\dots,X_n)$ αποφασίζουμε με κάποια αβεβαιότητα ποια υπόθεση θα διαλέξουμε για τον πληθυσμό.

Η περιοχή του $\mathbb{R}^n$ που οδηγεί στην απόρριψη της H_0 καλείται κρίσιμη περιοχή K, ενώ η συμπληρωματική της $A = K^c$ καλείται περιοχή αποδοχής.

Πως κατασκευάζουμε κρίσιμη περιοχή;

- Διάλεξε την κρίσιμη περιοχή εκείνη που καταλήγει σε μικρότερα σφάλματα επιλογής.

Έλεγχοι Παραμετρικής Υπόθεσης

Απόφαση	Πραγματικότητα	
	H_0 Αληθής	H_1 Αληθής
Δεν απορρίπτω H_0	Σωστή Απόφαση	Σφάλμα Τύπου II
Απορρίπτω H_0	Σφάλμα Τύπου I	Σωστή Απόφαση

$\alpha(\boldsymbol{\theta})$ = P(σφάλμα τύπου I) = P(απορρίπτω H_o | H_0 σωστή) = $P(\mathbf{X} \in K \mid \boldsymbol{\theta} \in \Theta_o)$

$\beta(\boldsymbol{\theta})$ = P(σφάλμα τύπου II) = P(δεν απορρίπτω H_o | H_1 σωστή) = $P(\mathbf{X} \in A \mid \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1)$

Έλεγχοι Παραμετρικής Υπόθεσης

- Χαρακτηριστική Ελέγχου: $\beta(\boldsymbol{\theta})$

- Όταν η μηδενική υπόθεση είναι απλή η ποσότητα $\alpha = \alpha(\boldsymbol{\theta})$ καλείται επίπεδο σημαντικότητας (ε.σ.) του ελέγχου.

- Μέγεθος του Ελέγχου: $\alpha = \sup \alpha(\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_o$ (μεγαλύτερο δυνατό σφάλμα τύπου Ι).

- Ισχύς Ελέγχου: $\pi(\boldsymbol{\theta}) = 1 - \beta(\boldsymbol{\theta}) = P(\mathbf{X} \in K \mid \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1)$

- Για απλές υποθέσεις $\alpha = \alpha(\boldsymbol{\theta})$ (δηλαδή το επίπεδο σημαντικότητας είναι το μέγεθος του ελέγχου) και $\beta = \beta(\boldsymbol{\theta})$

Παράδειγμα 1 (απλός έλεγχος)

Η διατομή X (mm) άξονα από την παραγωγή μιας μηχανής είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κατανομή $N(\mu,1)$. Με βάση τυχαίο δείγμα $x_1,...,x_n$ μεγέθους $n=9$ θα προσδιορίσουμε τις πιθανότητες των σφαλμάτων I και II είδους του ελέγχου των υποθέσεων

$$H_0 : \mu = 125 \text{ mm}$$
$$H_1 : \mu = 126 \text{ mm}$$

Οι πιθανότητες των σφαλμάτων τύπου I και II θα εξαρτηθούν από την κρίσιμη περιοχή K την οποία θα επιλέξουμε. Με ένα μάλλον αυθαίρετο τρόπο ας δεχθούμε, σ' αυτό το στάδιο, ότι τα σημεία $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ για τα οποία έχουμε $\bar{x} > 125.5$ mm συνηγορούν υπέρ της εναλλακτικής υπόθεσης H_1.

Παράδειγμα 1 (απλός έλεγχος)

Δηλαδή δεχόμαστε ως κρίσιμη περιοχή την

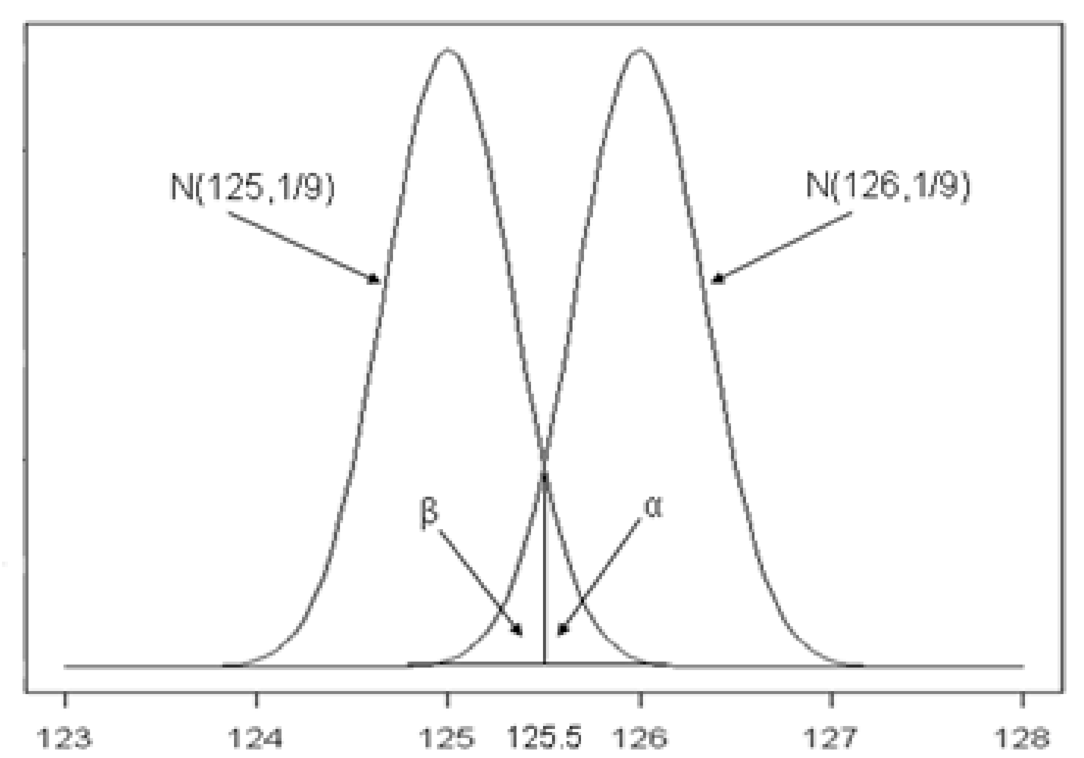
$$K = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} > 125.5 \right\} \text{ με } n = 9.$$

Επειδή τώρα $\bar{X} = n^{-1} \sum_1^n X_i \sim N\left(\mu, n^{-1}\right)$, οι πιθανότητες σφαλμάτων τύπου I και II θα είναι αντίστοιχα:

$$\alpha = P\left[\mathbf{X} \in K | \mu = 125\right] = P\left[\bar{X} > 125.5 \middle| \mu = 125\right] = 1 - \Phi(1.5) = 0.0668.$$

$$\beta = P\left[\mathbf{X} \in A | \mu = 126\right] = P\left[\bar{X} \leq 125.5 \middle| \mu = 126\right] = \Phi(-1.5) = 0.0668.$$

Παράδειγμα 1 (απλός έλεγχος)



Παράδειγμα 1 (απλός έλεγχος)

Από το παραπάνω σχήμα είναι φανερό ότι αν αντί της “κρίσιμης” τιμής των 125.5mm λάβουμε άλλη μεγαλύτερή της, τότε ελαττώνεται η πιθανότητα σφάλματος τύπου I ενώ αυξάνεται η πιθανότητα σφάλματος τύπου II. Το αντίστροφο συμβαίνει αν λάβουμε κρίσιμη τιμή μικρότερη των 125.5mm. Εκτός των παραπάνω παρατηρούμε επίσης ότι οι σ.π. $N\left(125,9^{-1}\right)$ και $N\left(126,9^{-1}\right)$ λαμβάνουν την ίδια τιμή για $\overline{x}=125.5$. Έτσι το άθροισμα $\alpha+\beta$ είναι το ελάχιστο δυνατό όταν ως κρίσιμη τιμή για το $\overline{x}$ θεωρούμε το 125.5. Συνεπώς η κρίσιμη περιοχή $K=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n:\overline{x}>125.5\right\}$ είναι βέλτιστη με την έννοια ότι ελαχιστοποιεί το άθροισμα των πιθανοτήτων των σφαλμάτων τύπου I και II. Πρέπει όμως να τονιστεί εδώ το εξής. Η παραπάνω κρίσιμη περιοχή καθορίστηκε μέσω της δειγματοσυνάρτησης $\overline{x}=n^{-1}\sum_1^n x_i$ και, συνεπώς, είναι βέλτιστη μεταξύ όλων των κρίσιμων περιοχών που καθορίζονται μέσω αυτής της δειγματοσυνάρτησης. Δεν έχει αποκλειστεί δηλαδή η δυνατότητα ύπαρξης μιας άλλης κρίσιμης περιοχής που να προκύπτει ενδεχομένως από άλλη δειγματοσυνάρτηση π.χ. από τη διάμεσο x_δ, η οποία να δίνει μικρότερο άθροισμα πιθανοτήτων των σφαλμάτων τύπου I και II.

Παράδειγμα 2 (σύνθετος έλεγχος)

Με τα δεδομένα του προηγούμενου παραδείγματος αν για τον έλεγχο των υποθέσεων

$$H_0 : \mu \le 125 \text{ mm}, \quad H_1 : \mu > 125 \text{ mm}$$

επιλέξουμε σαν κρίσιμη περιοχή την $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} > c\}$, όπου c αυθαίρετη σταθερά > 125 mm, απορρίπτουμε δηλαδή την $H_0 : \mu \le 125$ mm υπέρ της $H_1 : \mu > 125$ mm όταν ο δειγματικός μέσος $\bar{x}$ είναι “αρκετά” μεγαλύτερος από 125mm, τότε οι πιθανότητες των σφαλμάτων τύπου I και II θα είναι αντίστοιχα:

$$\alpha(\mu) = P\left[\bar{X} > c | \mu\right] = \Phi\left[(\mu - c)\sqrt{n}\right] \quad (\mu \le 125 \text{ mm})$$

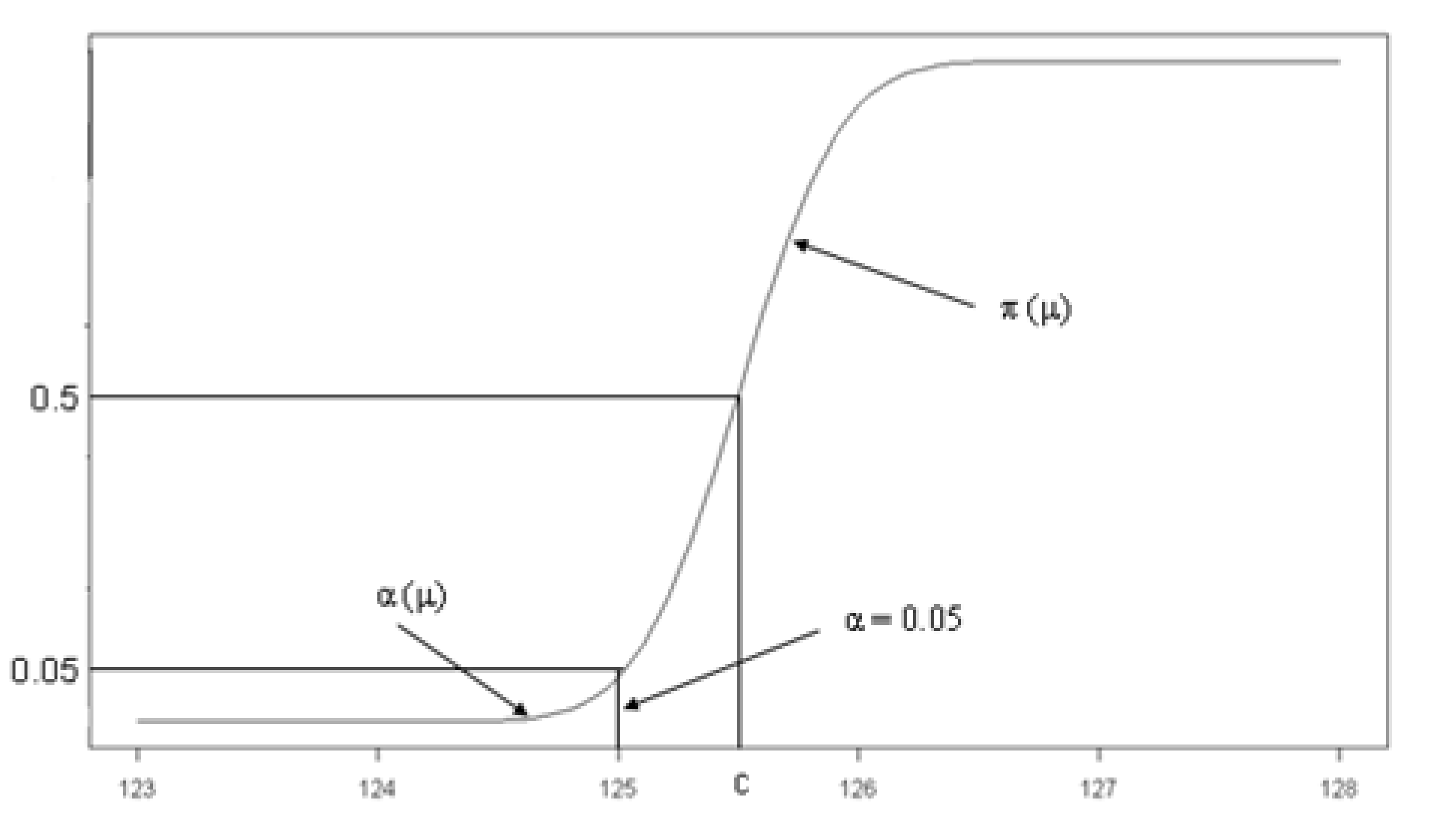
$$\beta(\mu) = P\left[\bar{X} \le c | \mu\right] = \Phi\left[(c - \mu)\sqrt{n}\right] \quad (\mu > 125 \text{ mm})$$

και συνεπώς η ισχύς του ελέγχου θα είναι

$$\pi(\mu) = P\left[\bar{X} > c | \mu\right] = \Phi\left[(\mu - c)\sqrt{n}\right] \quad (\mu > 125 \text{ mm}).$$

Από το παρακάτω σχήμα γίνεται φανερό ότι αυξάνοντας την κρίσιμη τιμή c η καμπύλη $\Phi\left[(\mu - c)\sqrt{n}\right]$ μετατοπίζεται προς τα δεξιά και έτσι μειώνεται η πιθανότητα σφάλματος I είδους $\alpha(\mu)$ για κάθε $\mu \le 125$.

Παράδειγμα 2 (σύνθετος έλεγχος)



Παράδειγμα 2 (σύνθετος έλεγχος)

Ταυτόχρονα όμως μειώνεται και η ισχύς του ελέγχου $\pi(\mu)$ για κάθε $\mu > 125$, αυξάνεται δηλαδή η πιθανότητα σφάλματος ΙΙ είδους. Επειδή τώρα η συνάρτηση $\alpha(\mu)$ $(\mu \le 125)$ είναι μονότονα αύξουσα συνάρτηση του μ για το μέγεθος του ελέγχου θα έχουμε $\alpha = \sup_{\mu} \alpha(\mu) = \alpha(125)$. Έτσι ελαττώνοντας το ανώτερο φράγμα α πιθανότητας σφάλματος τύπου Ι, αυξάνουμε την πιθανότητα σφάλματος τύπου ΙΙ $\beta(\mu)$ για κάθε $\mu > 125$, καθιστώντας όλο και περισσότερο δύσκολη την απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης H_0 υπέρ της εναλλακτικής H_1 όταν η τελευταία είναι αληθής. Ο μόνος τρόπος να περιορίσουμε σε επιθυμητά επίπεδα και την πιθανότητα σφάλματος τύπου ΙΙ $\beta(\mu)$ για $\mu > 125$ είναι να αυξήσουμε το μέγεθος του δείγματος n.

Παράδειγμα 3 (αμφίπλευρος έλεγχος)

Με τα δεδομένα του δεύτερου παραδείγματος ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση του **αμφίπλευρου** (*two–sided*) ελέγχου των υποθέσεων

$$H_0 : \mu = 125 \text{ mm}$$
$$H_1 : \mu \neq 125 \text{ mm}$$

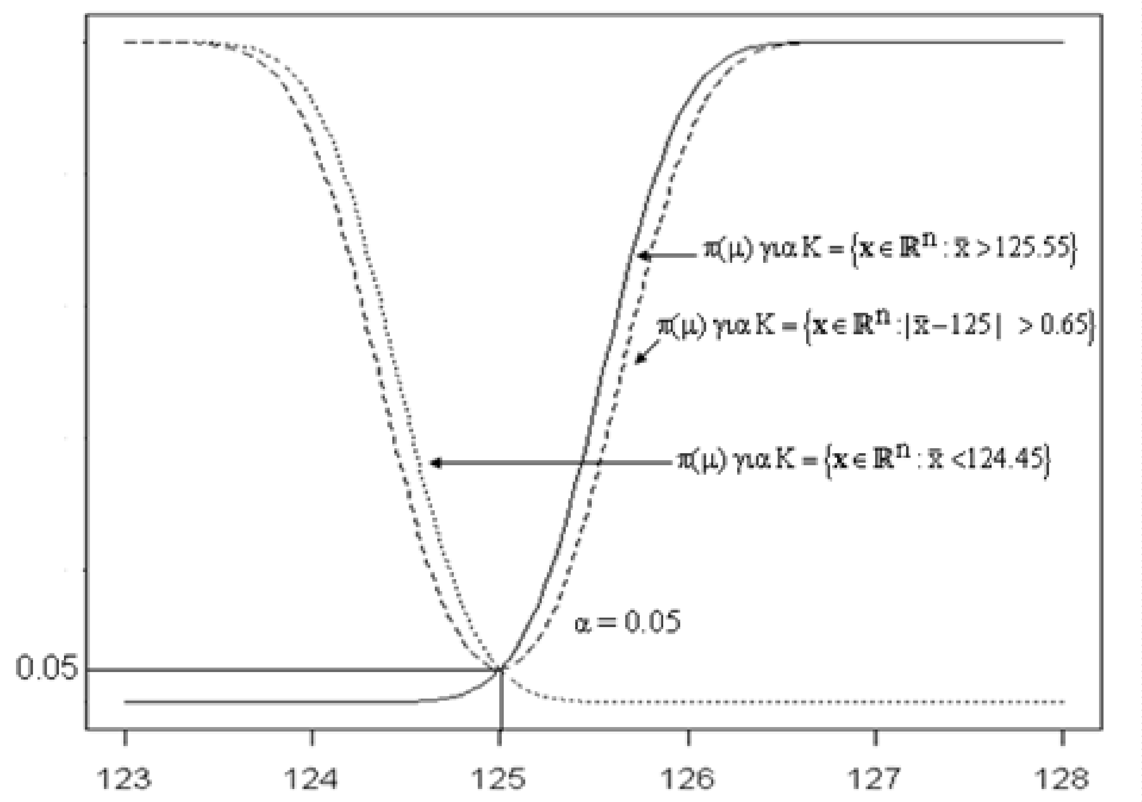
επιλέγοντας σαν κρίσιμη περιοχή την $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\bar{x} - 125| > c\}$. Θα απορρίπτουμε δηλαδή την H_0 υπέρ της H_1 όταν το τυχαίο δείγμα $\mathbf{x}$ δίνει δειγματικό μέσο $\bar{x}$ "αρκετά" μακριά από την τιμή των 125mm. Επειδή η υπόθεση H_0 είναι απλή, το επίπεδο σημαντικότητας α του ελέγχου θα είναι

$$\alpha = \alpha(125) = P\left[\left|\bar{X} - 125\right| > c | \mu = 125\right] = 2\Phi\left(-c\sqrt{n}\right).$$

Η χαρακτηριστική και η ισχύς του ελέγχου θα είναι αντίστοιχα

$$\beta(\mu) = P\left[\left|\bar{X} - 125\right| \leq c | \mu\right] =$$
$$= \Phi\left[(125 - \mu + c)\sqrt{n}\right] - \Phi\left[(125 - \mu - c)\sqrt{n}\right] \quad (\mu \neq 125 \text{ mm})$$
$$\pi(\mu) = P\left[\left|\bar{X} - 125\right| > c | \mu\right] =$$
$$= 1 - \Phi\left[(125 - \mu + c)\sqrt{n}\right] + \Phi\left[(125 - \mu - c)\sqrt{n}\right] \quad (\mu \neq 125 \text{ mm}).$$

Παράδειγμα 3 (αμφίπλευρος έλεγχος)



Παράδειγμα 3 (αμφίπλευρος έλεγχος)

Στο παραπάνω σχήμα εμφανίζονται επίσης οι συναρτήσεις ισχύος των κρισίμων περιοχών $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} > 125.55\}$ και $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} < 124.45\}$ οι οποίες έχουν επίσης ε.σ. $\alpha = 0.05$. Παρατηρούμε ότι καμία από τις τρεις παραπάνω κρίσιμες περιοχές δεν είναι καλύτερη των άλλων δύο για όλες τις τιμές του μέσου μ.

Ομοιόμορφα Ισχυρότατοι Έλεγχοι

Επειδή όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο δεν είναι πάντοτε εφικτή η ομοιόμορφη ελάττωση των συναρτήσεων $\alpha(\boldsymbol{\theta}),\ \ \boldsymbol{\theta}\in\Theta_0$ και $\beta(\boldsymbol{\theta}),\ \ \boldsymbol{\theta}\in\Theta_1$ ταυτόχρονα, θα θέσουμε ένα άνω φράγμα της συνάρτησης $\alpha(\boldsymbol{\theta}),\ \ \boldsymbol{\theta}\in\Theta_0$ και εν συνεχεία θα προσδιορίσουμε την κρίσιμη περιοχή $\mathrm{K}^\star$ έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η $\beta(\boldsymbol{\theta})$ για κάθε $\boldsymbol{\theta}\in\Theta_1$, και συνεπώς να μεγιστοποιείται η συνάρτηση ισχύος $\pi(\boldsymbol{\theta})$ για κάθε $\boldsymbol{\theta}\in\Theta_1$. Δηλαδή για την κρίσιμη περιοχή $\mathrm{K}^\star$ θα έχουμε:

$$\mathrm{K}^\star \in \mathsf{K}_\alpha = \left\{\mathrm{K}\subset\mathbb{R}^n : \mathrm{P}\left[\mathbf{X}\in\mathrm{K}\middle|\boldsymbol{\theta}\right]\le\alpha,\ \forall\boldsymbol{\theta}\in\Theta_0\right\}.$$

και για κάθε άλλη κρίσιμη περιοχή $\mathrm{K}\in\mathsf{K}_\alpha$ θα ισχύει

$$\mathrm{P}\left[\mathbf{X}\in\mathrm{K}\middle|\boldsymbol{\theta}\right]\le\mathrm{P}\left[\mathbf{X}\in\mathrm{K}^\star\middle|\boldsymbol{\theta}\right] \text{ για όλα τα } \boldsymbol{\theta}\in\Theta_1.$$

Ομοιόμορφα Ισχυρότατοι Έλεγχοι

Ένας έλεγχος με κρίσιμη περιοχή $K^{\star}$ που ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες ονομάζεται **ομοιόμορφα ισχυρότατος έλεγχος** (Ο.Ι.Ε) (*uniformly most powerful test*) με ε.σ. α (ομοιόμορφα ως προς $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_1$).

Όταν το Θ_1 είναι μονοσύνολο μιλάμε απλώς για **ισχυρότατο έλεγχο** (Ι.Ε.) (*most powerful test*).

Ομοιόμορφα Ισχυρότατοι Έλεγχοι

Θεώρημα 5.1 (Θεμελιώδες Λήμμα των Neyman–Pearson). Εάν για τον έλεγχο των υποθέσεων

$$\mathrm{H}_0 : \boldsymbol{\theta} = \Theta_0$$
$$\mathrm{H}_1 : \boldsymbol{\theta} = \Theta_1$$

υπάρχει κρίσιμη περιοχή K τέτοια ώστε

(i) $\mathrm{P}\left[\mathbf{X} \in \mathrm{K} \mid \boldsymbol{\theta}_0\right] = \alpha$

(ii) $\mathrm{p}\left(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\theta}_1\right) \geq c\mathrm{p}\left(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\theta}_0\right) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathrm{K}$ και

(iii) $\mathrm{p}\left(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\theta}_1\right) < c\mathrm{p}\left(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\theta}_0\right) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathrm{A} = \overline{\mathrm{K}}$,

όπου c σταθερά, τότε η περιοχή K αποτελεί κρίσιμη περιοχή Ι.Ε. με ε.σ. α.

Ομοιόμορφα Ισχυρότατοι Έλεγχοι

Απόδειξη: (Συνεχής περίπτωση). Στη συνεχή περίπτωση προφανώς υπάρχουν άπειρες σε πλήθος κρίσιμες περιοχές που να ικανοποιούν την (i). Έστω Λ μία τέτοια κρίσιμη περιοχή. Θα έχουμε συνεπώς

$$\mathrm{P}[\mathbf{X}\in \mathrm{K}|\boldsymbol{\theta}_0] = \mathrm{P}[\mathbf{X}\in \Lambda|\boldsymbol{\theta}_0] = \alpha. \tag{5.1}$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η ισχύς της κρίσιμης περιοχής K είναι μεγαλύτερη από την ισχύ της Λ. Πράγματι

$$\begin{aligned}
\pi_{\mathrm{K}}(\boldsymbol{\theta}_1) - \pi_{\Lambda}(\boldsymbol{\theta}_1) &= \mathrm{P}[\mathbf{X}\in \mathrm{K}|\boldsymbol{\theta}_1] - \mathrm{P}[\mathbf{X}\in \Lambda|\boldsymbol{\theta}_1] \\
&= \mathrm{P}\left[\mathbf{X}\in \mathrm{K}\bar{\Lambda}\middle|\boldsymbol{\theta}_1\right] - \mathrm{P}\left[\mathbf{X}\in \Lambda\bar{\mathrm{K}}\middle|\boldsymbol{\theta}_1\right] \\
&= \int_{\mathrm{K}\bar{\Lambda}} \mathrm{p}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}_1)\,d\mathbf{x} - \int_{\Lambda\bar{\mathrm{K}}} \mathrm{p}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}_1)\,d\mathbf{x} \\
&\geq c\left\{\int_{\mathrm{K}\bar{\Lambda}} \mathrm{p}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}_0)\,d\mathbf{x} - \int_{\Lambda\bar{\mathrm{K}}} \mathrm{p}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}_0)\,d\mathbf{x}\right\} \\
&= c\left\{\mathrm{P}\left[\mathbf{X}\in \mathrm{K}\bar{\Lambda}\middle|\boldsymbol{\theta}_0\right] - \mathrm{P}\left[\mathbf{X}\in \Lambda\bar{\mathrm{K}}\middle|\boldsymbol{\theta}_0\right] \pm \mathrm{P}[\mathbf{X}\in \mathrm{K}\Lambda|\boldsymbol{\theta}_0]\right\} \\
&= c\left\{\mathrm{P}[\mathbf{X}\in \mathrm{K}|\boldsymbol{\theta}_0] - \mathrm{P}[\mathbf{X}\in \Lambda|\boldsymbol{\theta}_0]\right\} = 0
\end{aligned}$$

δυνάμει της (5.1).

Ομοιόμορφα Ισχυρότατοι Έλεγχοι

Παρατηρήσεις:

1. Στην προηγούμενη απόδειξη

$$P(\mathbf{X}\in K\bar{\Lambda})-P(\mathbf{X}\in \Lambda\bar{K})=P(\mathbf{X}\in K)-P(\mathbf{X}\in \Lambda)$$

2. Λόγος Πιθανοφανειών:

$$\lambda(\mathbf{x})=\frac{p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}_1)}{p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}_0)}$$

3. Η κρίσιμη περιοχή Κ χαρακτηρίζεται από την ανισότητα

$$\lambda(\mathbf{x})\geq c \Leftrightarrow \log\lambda(\mathbf{x})\geq \log c$$

όπου το c το βρίσκουμε από την συνθήκη (i) του λήμματος.

Παράδειγμα

Θα προσδιορίσουμε την κρίσιμη περιοχή του Ι.Ε. της υπόθεσης H_0 ότι ο μέσος μ ενός Κανονικού πληθυσμού με γνωστή διασπορά σ^2 είναι μ_0, με εναλλακτική την H_1 ότι είναι μ_1 $(\mu_1 > \mu_0)$. Θα χρησιμοποιηθεί ε.σ. $\alpha = 0.05$. Ο λόγος πιθανοφανειών της H_1 προς την H_0 είναι

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_1^n (x_i - \mu_1)^2\right\}}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_1^n (x_i - \mu_0)^2\right\}}$$

$$= \exp\left\{\frac{n}{\sigma^2}\left[(\mu_1 - \mu_0)\bar{x} - \frac{1}{2}\left(\mu_1^2 - \mu_0^2\right)\right]\right\}.$$

Η ανισότητα $p(\mathbf{x}|\mu_1) \geq c p(\mathbf{x}|\mu_0)$ στο Λήμμα των Neyman – Pearson είναι ισοδύναμη με

$$\ln\lambda(\mathbf{x}) \geq \ln c$$

ή

$$\bar{x} > c_0 = \left\{\sigma^2 \ln c + \frac{1}{2} n\left(\mu_1^2 - \mu_0^2\right)\right\} \Big/ \left\{n(\mu_1 - \mu_0)\right\}.$$

Παράδειγμα

Άρα η κρίσιμη περιοχή είναι $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} > c_0\}$. Μένει συνεπώς να προσδιοριστεί η σταθερά c_0. Τούτο θα γίνει με βάση το επιθυμητό επίπεδο σημαντικότητας α και τη σχέση

$$P[\mathbf{X} \in K | \mu = \mu_0] = P\left[\bar{X} > c_0 \middle| \mu = \mu_0\right] = P\left[\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{c_0 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \middle| \mu = \mu_0\right] = \alpha.$$

Επειδή τώρα ο δειγματικός μέσος $\bar{X}$, κάτω από την H_0 ακολουθεί, κατανομή $N(\mu_0, \sigma^2/n)$, και συνεπώς η *ελεγχοσυνάρτηση* $Z = (\bar{X} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$ ακολουθεί την τυποποιημένη Κανονική $N(0,1)$, θα έχουμε:

$$c_0 = \mu_0 + z_\alpha \sigma/\sqrt{n} \text{ με } z_\alpha : P[Z > z_\alpha] = \alpha \text{ και } Z \sim N(0,1).$$

Για $\alpha = 0.05$ από τους πίνακες της $N(0,1)$ παίρνουμε $z_\alpha = 1.64$, οπότε η κρίσιμη περιοχή του Ι.Ε. της υπόθεσης $H_0 : \mu = \mu_0$, με εναλλακτική την $H_1 : \mu = \mu_1$ (με $\mu_1 > \mu_0$) είναι η

$$K = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} > \mu_0 + 1,64\sigma/\sqrt{n}\right\}. \qquad (5.2)$$

Παράδειγμα - Παρατηρήσεις

α) Εάν είχαμε $\mu_1 < \mu_0$, τότε αντί της παραπάνω κρίσιμης περιοχής θα είχαμε την περιοχή

$$K = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} < \mu_0 - 1.64\sigma / \sqrt{n} \right\}. \tag{5.3}$$

β) Επειδή η κρίσιμη περιοχή (5.2) δεν εξαρτάται από την εναλλακτική τιμή μ_1, υπό την προϋπόθεση ότι $\mu_1 > \mu_0$, θα είναι επίσης η κρίσιμη περιοχή του Ο.Ι.Ε. των υποθέσεων

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu > \mu_0.$$

Παρόμοια, η κρίσιμη περιοχή (5.3) θα είναι επίσης η κρίσιμη περιοχή του Ο.Ι.Ε. των υποθέσεων

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu < \mu_0.$$

Παράδειγμα - Παρατηρήσεις

γ) Με την κρίσιμη περιοχή (5.2) η πιθανότητα σφάλματος τύπου Ι για τη μηδενική υπόθεση $H_0: \mu \le \mu_0$ είναι:

$$\alpha(\mu) = P[\mathbf{X} \in K | \mu] = P\left[\bar{X} > \mu_0 + 1,64\sigma/\sqrt{n} \middle| \mu\right] \quad (\mu \le \mu_0),$$

και επειδή $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ θα έχουμε

$$\alpha(\mu) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + 1,64\right) \quad (\mu \le \mu_0),$$

δηλαδή αύξουσα συνάρτηση του μ και συνεπώς

$$\sup_{\mu \le \mu_0} \alpha(\mu) = \alpha(\mu_0) = 0.05.$$

Τούτο σημαίνει ότι η περιοχή (5.2) είναι η κρίσιμη περιοχή του Ο.Ι.Ε. των υποθέσεων

$$H_0: \mu \le \mu_0$$
$$H_1: \mu > \mu_0.$$

Παρόμοια η περιοχή (5.3) είναι η κρίσιμη περιοχή του Ο.Ι.Ε των υποθέσεων

$$H_0: \mu \ge \mu_0$$
$$H_1: \mu < \mu_0.$$

Παράδειγμα - Παρατηρήσεις

δ) Καμία από τις παραπάνω δύο περιοχές δεν δίνει ΟΙΕ για τον αμφίπλευρο έλεγχο

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Έλεγχοι Λόγου Μεγίστων Πιθανοφανειών

Παρουσιάζουμε τώρα μια, γενική μεν αλλά προσεγγιστική, μέθοδο κατασκευής Α.Ο.Ι.Ε. στατιστικών υποθέσεων που στηρίζεται στο λόγο μέγιστων πιθανοφανειών. Συγκεκριμένα, έστω η πολυπαραμετρική οικογένεια κατανομών $\{p(x|\boldsymbol{\theta}),\ \boldsymbol{\theta} = (\theta_1,...,\theta_m) \in \Theta\}$ και οι υποθέσεις

$$H_0 : \theta_1 = \theta_{01},\ \theta_2 = \theta_{02},...,\theta_r = \theta_{0r} \quad (r \le m)$$
$$H_1 : \theta_i \ne \theta_{0i} \text{ για ένα τουλάχιστον } i \quad (1 \le i \le r)$$

ή διαφορετικά

$$H_0 : \boldsymbol{\theta}^{(r)} = \boldsymbol{\theta}_0^{(r)}$$
$$H_1 : \boldsymbol{\theta}^{(r)} \ne \boldsymbol{\theta}_0^{(r)},$$

όπου $\boldsymbol{\theta}^{(r)} = (\theta_1,...,\theta_r)$ το διάνυσμα των r πρώτων συνιστωσών του $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1,...,\theta_m)$ και $\boldsymbol{\theta}_0^{(r)} = (\theta_{01},...,\theta_{0r})$. Θεωρούμε τον **λόγο μέγιστων πιθανοφανειών** (*maximum likelihood ratio*) ή αλλιώς τον **γενικευμένο λόγο πιθανοφανειών** (*generalized likelihood ratio*)

$$\lambda^\star(\mathbf{x}) = \frac{\sup\limits_{\theta|H_0} p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})}{\sup\limits_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta} p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})}.$$

Έλεγχοι Λόγου Μεγίστων Πιθανοφανειών

Προφανώς έχουμε $0 \le \lambda^{\star} \le 1$. Τιμές του $\lambda^{\star}$ κοντά στη μονάδα σημαίνουν ότι η υπόθεση H_0 είναι αληθοφανής, συμφωνεί δηλαδή το τυχαίο δείγμα $\mathbf{x}$ μαζί της, ενώ τιμές του $\lambda^{\star}$ κοντά στο μηδέν σημαίνουν χαμηλή αληθοφάνεια της H_0, ή, διαφορετικά, μεγάλο βαθμό ασυμφωνίας μεταξύ του τυχαίου δείγματος $\mathbf{x}$ και της H_0. Έτσι λαμβάνουμε ως κρίσιμη περιοχή του παραπάνω ελέγχου την

$$K = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \lambda^{\star}(\mathbf{x}) < c \right\},$$

όπου η σταθερά c προσδιορίζεται έτσι ώστε να έχουμε

$$P\left[\lambda^{\star}(\mathbf{X}) < c \,\middle|\, \boldsymbol{\theta}^{(r)} = \boldsymbol{\theta}_0^{(r)} \right] = \alpha.$$

Παράδειγμα 1

Έστω μ ο μέσος Κανονικού πληθυσμού με γνωστή διασπορά σ^2 και οι υποθέσεις

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

Για τυχαίο δείγμα $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)^T$ από τον πληθυσμό αυτό θα έχουμε

$$p(\mathbf{x}|\mu) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\},$$

και συνεπώς

$$\sup_{\mu|H_0} p(\mathbf{x}|\mu) = p(\mathbf{x}|\mu_0) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2\right\}$$

ενώ

$$\sup_{\mu\in\mathbb{R}} p(\mathbf{x}|\mu) = p(\mathbf{x}|\hat{\mu}) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right\}.$$

Παράδειγμα 1

Συνεπώς

$$\lambda^{\star}(\mathbf{x}) = \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-\mu_0)^2\right\}$$

και

$$l(\mathbf{x}) = -2\ln\lambda^{\star}(\mathbf{x}) = \frac{n}{\sigma^2}(\bar{x}-\mu_0)^2.$$

Παρατηρούμε εδώ ότι η ελεγχοσυνάρτηση $l(\mathbf{X}) = (\bar{X}-\mu_0)^2 \big/ (\sigma^2/n)$, κάτω από την H_0, ακολουθεί ακριβώς την $X^2(1)$ αφού η τ.μ. $(\bar{X}-\mu_0)\big/(\sigma/\sqrt{n})$ ακολουθεί $N(0,1)$ κατανομή. Έτσι για την κρίσιμη περιοχή K θα έχουμε:

Παράδειγμα 1

$$K = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : 1(\mathbf{x}) > \mathrm{X}^2_{1,\alpha} \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \frac{n}{\sigma^2}\left(\bar{x} - \mu_0\right)^2 > \mathrm{X}^2_{1,\alpha} \right\}$$
$$= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma / \sqrt{n}} > z_{\alpha/2} \right\}$$

όπου η κρίσιμη τιμή $z_{\alpha/2}$ είναι τέτοια ώστε για μια τ.μ. Z που ακολουθεί $N(0,1)$ να έχουμε $P\left[|Z| > z_{\alpha/2}\right] = \alpha$.

Θα πρέπει εδώ επίσης να παρατηρήσουμε την αντιστοιχία που υπάρχει μεταξύ της μη κρίσιμης περιοχής του αμφίπλευρου ελέγχου του μέσου μ με ε.σ. α και του διαστήματος εμπιστοσύνης του μέσου μ με σ.ε. $\gamma = 1 - \alpha$.

Συγκεκριμένα η μη κρίσιμη περιοχή είναι

$$A = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mu_0 - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} < \bar{x} < \mu_0 + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \right\}$$

ή ισοδύναμα

$$A = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} < \mu_0 < \bar{x} + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \right\}.$$

Η τελευταία όμως διπλή ανισότητα αποτελεί ως γνωστόν το Δ.Ε. του μέσου μ Κανονικού πληθυσμού γνωστής διασποράς με σ.ε. $\gamma = 1 - \alpha$.

Παράδειγμα 2

Έλεγχος Μέσου Κανονικού Πληθυσμού με Άγνωστη Διασπορά

Άσκηση!!!